Teoria miary i całki
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 1

09/10/06

W zadaniach 0-4 μ oznacza miarę na przestrzeni mierzalnej (X, Σ). Wszystkie zbiory A, B, A_n itp. należą do Σ.

Zadanie 0
Czy funkcja przyporządkowująca wszystkim zbiorom z Σ wartość 0 jest miarą?

Zadanie 1
Udowodnij wzory

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ \mu(A \setminus B) &= \mu(A \cup B) - \mu(B) \\ \mu(A \Delta B) &= \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B) \end{aligned}$$

o ile odjemniki nie są nieskończone.

Zadanie 2
Udowodnij, że dla dowolnego ciągu zbiorów A_n zachodzi nierówność

$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n),$$

natomiast jeśli $\mu(\bigcup_n A_n < \infty)$, to również

$$\mu(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_n).$$

Podaj przykład na istotność założenia.

Zadanie 3
Podaj przykłady na to, że powyższe nierówności nie muszą być równościami.

Zadanie 4
Udowodnij, że jeśli $\mu(\bigcup_n A_n < \infty)$ i $\lim A_n$ istnieje, to wtedy już zachodzi równość

$$\mu(\lim A_n) = \lim\, \mu(A_n),$$

Niech (X, Σ) będzie przestrzenią mierzalną. Funkcję $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$ nazywamy *miarą skończenie addytywną* jeśli $\nu(A \dot{\cup} B) = \nu(A) + \nu(B)$ oraz $\nu(\emptyset) = 0$.

Zadanie 5
Które własności miary spełniają też miary skończenie addytywne? (np. $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$, albo własności z zadania 1)

Zadanie 6
Wykaż, że każda miara skończenie addytywna (w tym każda "prawdziwa" miara prezeliczalnie addytywna) sepłnia warunek

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$$

(o ile $\mu(A) < \infty$ lub $\mu(B) < \infty$, bo inaczej wychodzi symbol nieoznaczony).

Zadanie 7
Dla dowolnej miary skończenie addytywnej ν udowodnij wzór

$$\nu(\dot{\bigcup_n} A_n) \geq \sum_n \nu(A_n)$$

Zadanie 8
Udowodnij, że μ jest miarą wtedy i tylko wtedy gdy jest miarą skończenie addytywną ciągłą z dołu.

Zadanie 9
Podaj, na jakiejś przestrzeni mierzalnej, przykład miary skończenie addytywnej ν, która nie jest miarą.
Wsk. Weź $\Sigma = 2^X$, gdzie X jest dowolną przestrzenią nieskończoną, a ν niech przyjmuje tylko wartości 0 lub ∞ (na jakich zbiorach co?).

Zadanie 10*
Niech ν będzie miarą skończenie addytywną. Określmy $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ wzorem

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) : (A_n) \text{ jest ciągiem rozłącznym takim, że } \dot{\bigcup_n} A_n = A \right\}.$$

sprawdź, że μ jest miarą (przeliczalnie addytywną).
Wsk. Sprawdź najpierw, czy μ jest miarą skończenie addytywną.